2.9.18 Řešení exponenciálních rovnic logaritmováním

Př. 1: Vyřeš rovnici $3^{x+1} = 2^{3-2x}$.

$3^{x+1} = 2^{3-2x}$ $\quad \log 3^{x+1} = \log 2^{3-2x}$ $\quad (x+1)\log 3 = (3-2x)\log 2$ roznásobíme závorky.

$x\log 3 + \log 3 = 3\log 2 - 2x\log 2$ $\quad x(\log 3 + 2\log 2) = 3\log 2 - \log 3$

$$x = \frac{3\log 2 - \log 3}{\log 3 + 2\log 2} \qquad K = \left\{ \frac{3\log 2 - \log 3}{\log 3 + 2\log 2} \right\}$$

Př. 2: Uprav výsledek předchozího příkladu tak, aby v čitateli i jmenovateli zlomku byl jediný logaritmus z jednoho čísla. Pak vypočti pomocí kalkulačky přibližnou hodnotu řešení předchozí rovnice a dosazením ověř správnost výsledku.

$$x = \frac{3\log 2 - \log 3}{\log 3 + 2\log 2} = \frac{\log 2^3 - \log 3}{\log 3 + \log 2^2} = \frac{\log\left(\frac{2^3}{3}\right)}{\log\left(3\cdot 2^2\right)} = \frac{\log\frac{8}{3}}{\log 12} \doteq 0,3947$$

Dosadíme: $3^{0,3947+1} = 2^{3-2\cdot 0,3947}$. $\quad 3^{1,3947} = 2^{2,2106}$ $\quad 4,6285 = 4,6286$

Př. 3: Vyřeš rovnici $\left(\sqrt{5}\right)^{2x+1} = \left(7^2\right)^{1-x}$. Logaritmuj se základem *e*. Výsledek uprav do tvaru podílu dvou logaritmů. Uveď přibližný výsledek s přesností na 6 desetinných míst.

$\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{2x+1} = 7^{2(1-x)}$ $\quad 5^{x+\frac{1}{2}} = 7^{2-2x}$ $\quad \ln\left(5^{x+\frac{1}{2}}\right) = \ln\left(7^{2-2x}\right)$ $\quad \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln 5 = (2-2x)\ln 7$

$x\ln 5 + 0,5\ln 5 = 2\ln 7 - 2x\ln 7$ $\quad x(\ln 5 + 2\ln 7) = 2\ln 7 - 0,5\ln 5$

$$x = \frac{2\ln 7 - 0,5\ln 5}{\ln 5 + 2\ln 7} = \frac{\ln 49 - \ln\sqrt{5}}{\ln 5 + \ln 49} = \frac{\ln\frac{49}{\sqrt{5}}}{\ln 245} \doteq 0,561163$$

$$K = \left\{ \frac{2\ln 7 - 0,5\ln 5}{\ln 5 + 2\ln 7} \right\}$$

Př. 4: Vyřeš rovnici: $4\cdot 2^{2x-1} = \frac{3^{x+3}}{9}$. Logaritmuj o různých základech. Spočti a porovnej přibližné výsledky z různých způsobů řešení.

$2^2\cdot 2^{2x-1} = \frac{3^{x+3}}{3^2}$. $\quad 2^{2x+1} = 3^{x+1}$

- 10 a *e* – snadný výpočet na kalkulačce
- 2 a 3 – na jedné straně rovnice zmizí logaritmus

$2^{2x+1} = 3^{x+1}$

$\log\left(2^{2x+1}\right) = \log\left(3^{x+1}\right)$

$(2x+1)\log 2 = (x+1)\log 3$

$2x\log 2 + \log 2 = x\log 3 + \log 3$

$2x\log 2 - x\log 3 = \log 3 - \log 2$

$2^{2x+1} = 3^{x+1}$

$\ln\left(2^{2x+1}\right) = \ln\left(3^{x+1}\right)$

$(2x+1)\ln 2 = (x+1)\ln 3$

$2x\ln 2 + \ln 2 = x\ln 3 + \ln 3$

$2x\ln 2 - x\ln 3 = \ln 3 - \ln 2$

$x(2\log 2-\log 3)=\log 3-\log 2$ $\qquad$ $x(2\ln 2-\ln 3)=\ln 3-\ln 2$

$x=\dfrac{\log 3-\log 2}{2\log 2-\log 3}=\dfrac{\log\frac{3}{2}}{\log\frac{4}{3}}\doteq 1,409421$ $\qquad$ $x=\dfrac{\ln 3-\ln 2}{2\ln 2-\ln 3}=\dfrac{\ln\frac{3}{2}}{\ln\frac{4}{3}}\doteq 1,409421$

$2^{2x+1}=3^{x+1}$ $\qquad$ $2^{2x+1}=3^{x+1}$

$\log_2\left(2^{2x+1}\right)=\log_2\left(3^{x+1}\right)$ $\qquad$ $\log_3\left(2^{2x+1}\right)=\log_3\left(3^{x+1}\right)$

$(2x+1)\log_2 2=(x+1)\log_2 3$ $\qquad$ $(2x+1)\log_3 2=(x+1)\log_3 3$

$(2x+1)\cdot 1=x\log_2 3+1\log_2 3$ $\qquad$ $2x\log_3 2+\log_3 2=(x+1)\cdot 1$

$2x-x\log_2 3=\log_2 3-1$ $\qquad$ $2x\log_3 2-x=1-\log_3 2$

$x(2-\log_2 3)=\log_2 3-1$ $\qquad$ $x(2\log_3 2-1)=1-\log_3 2$

$x=\dfrac{\log_2 3-1}{2-\log_2 3}\doteq 1,409421$ $\qquad$ $x=\dfrac{1-\log_3 2}{2\log_3 2-1}\doteq 1,409421$

Př. 5: Vyřeš rovnici $2\cdot 3^{2x}=5^{x-1}$.

$\log\left(2\cdot 3^{2x}\right)=\log\left(5^{x-1}\right)$ $\qquad$ $\log 2+\log\left(3^{2x}\right)=\log\left(5^{x-1}\right)$ $\qquad$ $\log 2+2x\log 3=(x-1)\log 5$

$\log 2+2x\log 3=x\log 5-\log 5$ $\qquad$ $x(2\log 3-\log 5)=-\log 5-\log 2$

$x=\dfrac{-\log 5-\log 2}{2\log 3-\log 5}=\dfrac{\log\frac{1}{10}}{\log\frac{9}{5}}=-\dfrac{1}{\log\frac{9}{5}}$ $\qquad$ $K=\left\{\dfrac{-\log 5-\log 2}{2\log 3-\log 5}\right\}$

Př. 6: Vyřeš rovnici $2^{x+2}\cdot 3^{x-1}=5^{2x}$.

$2^{x+2}\cdot 3^{x-1}=5^{2x}$ $\qquad$ $\log\left(2^{x+2}\cdot 3^{x-1}\right)=\log\left(5^{2x}\right)$ $\qquad$ $\log\left(2^{x+2}\right)+\log\left(3^{x-1}\right)=\log\left(5^{2x}\right)$

$(x+2)\log 2+(x-1)\log 3=2x\log 5$ $\qquad$ $x(\log 2+\log 3-2\log 5)=\log 3-2\log 2$

$x=\dfrac{\log 3-2\log 2}{\log 2+\log 3-2\log 5}$ $\qquad$ $K=\left\{\dfrac{\log 3-2\log 2}{\log 2+\log 3-2\log 5}\right\}$

Př. 7: Vyřeš rovnici $2^{x^2}\cdot 3^{2x}=5^x$.

$2^{x^2}\cdot 3^{2x}=5^x$ - logaritmujeme.

$\log\left(2^{x^2}\cdot 3^{2x}\right)=\log\left(5^x\right)$ - každá strana je jedno číslo, které musíme logaritmovat dohromady.

$\log\left(2^{x^2}\right)+\log\left(3^{2x}\right)=\log\left(5^x\right)$

$x^2\log 2+2x\log 3=x\log 5$

$x^2\log 2+2x\log 3-x\log 5=0$ $\Rightarrow$ kvadratická rovnice bez absolutního členu $\Rightarrow$ vytkneme *x*.

$x(x\log 2+2\log 3-\log 5)=0$

$x_1=0$ $\qquad$ $x\log 2+2\log 3-\log 5=0\ \Rightarrow\ x\log 2=\log 5-2\log 3$

$x_2=\dfrac{\log 5-2\log 3}{\log 2}$ $\qquad$ $K=\left\{0;\dfrac{\log 5-2\log 3}{\log 2}\right\}$